**Практическая работа № 4,5**

**«**Построение математических моделей, используемых при описании сложных систем**»**

**Цель работы:** научиться строить математические модели в экологии

**Образовательные результаты, заявленные во ФГОС третьего поколения:**

Студент должен

уметь:

- подбирать аналитические методы исследования математических моделей;

- использовать численные методы исследования математических моделей;

- работать с пакетами прикладных программ аналитического и численного исследования математических моделей;

знать:

- основные типы математических моделей, используемых при описании сложных систем и при принятии решений.

**Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практической работы**

**Лабораторная работа 2**

**МОДЕЛИ СВОБОДНОГО И ОГРАНИЧЕННОГО РОСТА ПОПУЛЯЦИЙ**

## 1. Постановка задачи

В начальный момент времени  количественный состав некоторого биологического вида равен  единиц. Требуется сделать прогноз численности  данной популяции при  для двух случаев:

* относительный темп прироста популяции не зависит от ее численности и равен постоянной величине  (свободный рост популяции),
* относительный темп прироста популяции уменьшается линейно с увеличением ее численности и равен величине  (ограниченный рост популяции).

С этой целью необходимо

* составить математическую модель свободного роста популяции в виде линейного дифференциального уравнения, найти аналитическое решение уравнения;
* составить математическую модель ограниченного роста популяции в виде дифференциального уравнения Бернулли, определить аналитическое и численное решение уравнения при заданных начальных условиях, показать графически приближенное совпадение полученных решений;
* привести графическую иллюстрацию изменения численности для моделей свободного и ограниченного роста популяции;
* сделать выводы по работе.

## 2. Сведения из теории

**2.1. Модель Мальтуса**

В огромном числе случаев при попытке построить модель какого либо объекта либо невозможно прямо указать физические законы, которым он подчиняется, либо с точки зрения наших сегодняшних знаний, вообще нет уверенности в существовании подобных законов, допускающих математическую формулировку. Одним из плодотворных подходов к такого рода объектам является использование аналогий с уже изученными явлениями. Что, казалось бы общего между радиоактивным распадом и динамикой популяций, в частности изменением численности населения нашей планеты? Однако на простейшем уровне такая аналогия вполне просматривается, о чем свидетельствует одна из простейших моделей популяций, называемая моделью Мальтуса. В ее основу положено простое утверждение — скорость изменения населения со временем  пропорциональна его текущей численности , умноженной на сумму коэффициентов рождаемости  и смертности . В результате приходим к уравнению

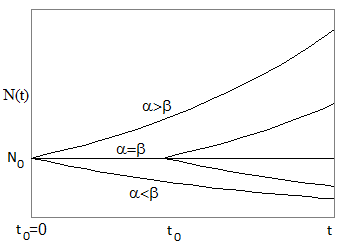
, (1)

которое похоже на уравнение радиоактивного распада и совпадающего с ним при  (если  и  – постоянные). Это не удивительно, так как при их выводе использовались одинаковые соображения. Интегрирование выше приведенного уравнения дает

, при ,

где  – численность населения в момент  (начальная численность).

На рис. 1 приведены графики функции при постоянных  и  (разным подобным друг другу кривыми соответствуют разные  - значения времени начала процесса). При  численность остается постоянной, т.е. в этом случае решением уравнения является равновесная величина . Равновесие между рождаемостью и смертностью неустойчиво в том смысле, что даже небольшое нарушение равенства  приводит с течением времени ко все большему отклонению функции  от равновесного значения . При  численность населения убывает и стремится к нулю при , а при  растет по экспоненциальному закону, обращаясь в бесконечность при . Последнее обстоятельство и послужило основанием для опасений Мальтуса о грядущем перенаселении Земли со всеми вытекающими отсюда последствиями.



**Рис.1.** Изменение численности популяции со временем в модели Мальтуса

В данном примере можно указать немало очевидных ограничений применимости построенной модели. Конечно же, сложнейший процесс изменения численности населения, зависящий к тому же от сознательного вмешательства самих людей, не может описываться какими-либо простыми закономерностями. Даже в идеальном случае изолированной биологической популяции предложенная модель не отвечает реальности в полной мере хотя бы из-за ограниченности ресурсов, необходимых для ее существования.

Сделанное замечание тем не менее нисколько не умаляет роли аналогий в построении математических моделей очень сложных явлений. Применение аналогий основано на одном из важнейших свойств моделей - их универсальности, т.е. их приложимости к объектам принципиально различной природы. Так, предположения типа "скорость изменения величины (или некоторой функции от нее)" широко используется в далеких друг от друга областях знаний.

**2.2. Моделирование развития изолированной популяции**

Предположим, что в момент времени , час, численность некоторого биологического вида составляет  единиц.

Пусть  – запас этого вида в момент времени . Тогда производная  есть темп прироста, а отношение  представляет собой относительный темп прироста данного биологического вида.

Далее рассмотрим биологический вид со свободным (неограниченным) и ограниченным ростом. В первой модели допустим, что относительный темп прироста есть величина постоянная, не зависящая от текущего количества. Тогда  является постоянной величиной. Отсюда следует, что справедливо дифференциальное уравнение

, (2)

представляющее собой математическую модель изменения численности популяции со свободным ростом. Очевидно, это есть модель Мальтуса, в которой коэффициент рождаемости  является постоянной величиной, а коэффициент смертности равен нулю .

Общим решением этого уравнения является функция , где  – произвольная постоянная величина. Согласно начальному условию при  должно быть , и тогда . Следовательно, . Окончательно получим, что численность популяции изменяется по экспоненциальному закону

. (3)

Даже эта простейшая модель заслуживает обсуждения. Очевидно, что неограниченно долго возрастать популяция не может. Простейший способ учета внутривидовой конкуренции связан с гипотезой о том, что коэффициент воспроизводства не есть константа, а зависит от численности популяции, спадая по мере ее роста.

Во второй модели предположим, что относительный темп прироста популяции замедляется с ростом ее количества, т.е. отношение  убывает с увеличением . Если это убывание линейно, то математически этот факт можно записать в виде , где постоянная .

Отсюда следует, что имеет место дифференциальное уравнение

, (4)

где .

Уравнение (4) является частным случаем известного в математике дифференциального уравнения Бернулли. Сделаем в уравнении (4) **замену переменных . Тогда получим**

,

или

.

**Таким образом, уравнение (4) свелось к линейному дифференциальному уравнению первого порядка. Общим решением последнего уравнения является функция**

. В этом можно убедиться путем непосредственной подстановки.

Следовательно, общим решением уравнения (4) является функция .

С учетом начального условия  получим, что . Тогда частным решением уравнения (4) будет функция

. (5)

**Графики функций (3) и (5) изображены на рис.2 для значений** ,  и начальных условий , .

**Рис.2. Свободный (кривая 1) и ограниченный (кривая 2) рост популяции**

Из рисунка видно, что кривая 1 неограниченно возрастает, а кривая 2 с увеличением времени приближается к стационарному значению, равному .

Уравнение (4) называется логистическим уравнением. Оно известно также как уравнение Ферхюльста (по имени впервые сформулировавшего его бельгийского математика). Изначально это уравнение появилось при рассмотрении модели роста [численности населения](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D0%B5%D0%BC%D0%BE%D0%B3%D1%80%D0%B0%D1%84%D0%B8%D1%8F).

Исходные предположения для вывода уравнения при рассмотрении [популяционной](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D0%BE%D0%BF%D1%83%D0%BB%D1%8F%D1%86%D0%B8%D1%8F) динамики выглядят следующим образом:

* скорость размножения популяции пропорциональна её текущей численности, при прочих равных условиях
* скорость размножения популяции пропорциональна количеству доступных ресурсов, при прочих равных условиях. Таким образом, второй член уравнения отражает конкуренцию за ресурсы, которая ограничивает рост популяции.

Параметр  характеризует скорость роста (размножения), а  — емкость среды, то есть максимально возможную численность популяции.

Отметим некоторые свойства логистической функции (4).

1. 

2. В ситуации «достаточного объёма ресурсов», то есть пока  много меньше , логистическая функция поначалу растёт приблизительно экспоненциально:

.

3. Аналогично, при «исчерпании ресурсов» () разность  экспоненциально убывает с таким же показателем. Действительно,

,

и, следовательно,

.

Отсюда следует, что при  произведение  стремится к постоянной величине, а это означает, что разность  убывает по экспоненциальному закону с показателем .

В данном случае дифференциальное уравнение (4) имеет достаточно простое аналитическое решение вида (5). Но это бывает крайне редко. Как правило, дифференциальные уравнения не имеют аналитического решения, и тогда следует находить приближенное численное решение. Одним из самых простых методов решения дифференциальных уравнений первого порядка является метод Эйлера. Рассмотрим этот метод применительно к уравнению вида



и начальному условию . Здесь правая часть уравнения имеет вид .

Выберем достаточно малый шаг интегрирования  и пусть , , ,  - узлы интегрирования. Тогда , а значения искомой функции в узлах , ,…, определяются по формулам

,

,

…,

. (6)

В результате будет получена таблица значений искомой функции.

## 3. Пример выполнения лабораторной работы

Выполнение лабораторной работы предполагается в среде Microsoft.Excel. Исходные данные для расчетов приведены в табл.1.

Таблица 1

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| , час | N0 | , час | k |
| 21 | 40 | 0,29 | 90 |

* 1. **Математическая модель свободного роста популяции**

Для данных табл.1 математическая модель свободного роста численности популяции (2) представляется уравнением

.

Для произвольного момента времени  численность популяции является решением этого уравнения и представляется равенством (3), которое для данных табл.1 выражается соотношением

. (7)

* 1. **Математическая модель ограниченного роста популяции**

Для ограниченного роста численности популяции согласно (4) справедливо следующее дифференциальное уравнение

.

Аналитическое решение дается соотношением (5)

.

Заметим, что из последнего равенства следует более простое выражение для , а именно,

. (8)

Численное решение определим методом Эйлера. Поместим в ячейку E1 значение шага интегрирования , который примем равным 0,1.

Последующие результаты расчетов представим в виде табл.2.

Таблица 2

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **A** | **B** | **C** | **D** |
| **1** | t | N(t)\_своб | N(t)\_огран | N(t)\_Эйлер |
| **2** | 21 | 40 | 40 | 40 |
| **3** | 21,1 | 41,17698 | 40,64544 | 40,64444 |
| **4** | 21,2 | 42,3886 | 41,29269 | 41,29083 |
| **5** | 21,3 | 43,63587 | 41,94149 | 41,9389 |
| **...** | … | … | … | … |
| **210** | 41,8 | 16661,89 | 89,73073 | 89,74767 |
| **211** | 41,9 | 17152,16 | 89,7384 | 89,75497 |
| **212** | 42 | 17656,86 | 89,74586 | 89,76206 |

В табл.2 время изменяется от час. до час. с шагом . Соответствующие значения содержатся в блоке ячеек A2 : A212. В столбце B содержатся значения функции (3), соответствующие свободному росту популяции, в столбцах C и D содержатся значения, соответствующие ограниченному росту популяции на основе аналитического решения (5) и численного алгоритма (6).

Согласно равенствам (7) и (8) в ячейки B2 и C2 записываются выражения

= 40 \* EXP(0,29 \* (A2-21))

и

= 90 \* B2 / (90 + B2 - 40),

которые копируются на блок ячеек B3 : B212 и C3 : C212 соответственно.

В ячейку D2 помещается значение . Согласно (4) правая часть дифференциального уравнения имеет вид

,

поэтому в ячейку D3 помещается формула

= D2 + $E$1 \* 0,29 \* D2 \* (1 – D2 / 90),

которая копируется на блок ячеек D4 : D212. По заданию необходимо установить близость аналитического и численного решений дифференциального уравнения (4), соответствующего ограниченному росту популяции. Графическая иллюстрация данных из колонок C и D приведена на рис.3.

**Рис.3.** Графики аналитического и численного решений уравнения (4)

Из рис.3 следует практическое совпадение решений дифференциального уравнения аналитическим и численным методами.

* 1. **Иллюстрация изменения численности для свободного и ограниченного роста популяции**

## На рис. 4 представлены графики свободного и ограниченного роста численности популяции.

**Рис. 4.** Изменение численности популяции для свободного и ограниченного роста

График ограничен сверху горизонтальной линией, соответствующей численности .

Из рисунка следует неограниченный рост численности популяции для случая свободного роста. В случае ограниченного роста кривая изменения численности популяции достаточно быстро входит в стационарный режим, приближаясь к значению .

## 4. Форма отчета

По результатам выполненной лабораторной работы представляется отчет, в котором должны содержаться следующие пункты:

1. Постановка задачи с конкретным содержанием, сформулированным для своего варианта. Исходные данные должны быть представлены в виде табл.1.
2. Математическая модель свободного роста популяции и ее аналитическое решение.
3. Математическая модель ограниченного роста популяции. Привести аналитическое и численное решение соответствующего дифференциального уравнения. Графически показать совпадение двух методов решения.
4. Графическая иллюстрация изменения численности для моделей свободного и ограниченного роста популяции.
5. Выводы по результатам исследований.

## 5. Задания к лабораторной работе

|  |  |
| --- | --- |
| Вариант 1 |  |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **МОДЕЛИ СВОБОДНОГО И ОГРАНИЧЕННОГО РОСТА ПОПУЛЯЦИЙ** | | | | |
|  |  |  |  |  |
| **t0** | **N0** | **r** | **k** |  |
| 23 | 59 | 1,58 | 77 |  |
| Вариант 2 | | | | | | |  |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **МОДЕЛИ СВОБОДНОГО И ОГРАНИЧЕННОГО РОСТА ПОПУЛЯЦИЙ** | | | | |
|  |  |  |  |  |
| **t0** | **N0** | **r** | **k** |  |
| 17 | 38 | 1,52 | 82 |  |
| Вариант 3 | | | | | | |  |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **МОДЕЛИ СВОБОДНОГО И ОГРАНИЧЕННОГО РОСТА ПОПУЛЯЦИЙ** | | | | |
|  |  |  |  |  |
| **t0** | **N0** | **r** | **k** |  |
| 11 | 46 | 0,84 | 71 |  |
| Вариант 4 | | | | | | |  |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **МОДЕЛИ СВОБОДНОГО И ОГРАНИЧЕННОГО РОСТА ПОПУЛЯЦИЙ** | | | | |
|  |  |  |  |  |
| **t0** | **N0** | **r** | **k** |  |
| 25 | 46 | 1,4 | 75 |  |
| Вариант 5 | | | | | | |  |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **МОДЕЛИ СВОБОДНОГО И ОГРАНИЧЕННОГО РОСТА ПОПУЛЯЦИЙ** | | | | |
|  |  |  |  |  |
| **t0** | **N0** | **r** | **k** |  |
| 19 | 55 | 0,36 | 94 |  |
| Вариант 6 | | | | | | |  |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **МОДЕЛИ СВОБОДНОГО И ОГРАНИЧЕННОГО РОСТА ПОПУЛЯЦИЙ** | | | | |
|  |  |  |  |  |
| **t0** | **N0** | **r** | **k** |  |
| 13 | 33 | 0,30 | 99 |  |
| Вариант 7 | | | | | | |  |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **МОДЕЛИ СВОБОДНОГО И ОГРАНИЧЕННОГО РОСТА ПОПУЛЯЦИЙ** | | | | |
|  |  |  |  |  |
| **t0** | **N0** | **r** | **k** |  |
| 26 | 33 | 0,50 | 71 |  |
| Вариант 8 | | | | | | |  |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **МОДЕЛИ СВОБОДНОГО И ОГРАНИЧЕННОГО РОСТА ПОПУЛЯЦИЙ** | | | | |
|  |  |  |  |  |
| **t0** | **N0** | **r** | **k** |  |
| 20 | 42 | 1,82 | 82 |  |
| Вариант 9 | | | | | | |  |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **МОДЕЛИ СВОБОДНОГО И ОГРАНИЧЕННОГО РОСТА ПОПУЛЯЦИЙ** | | | | |
|  |  |  |  |  |
| **t0** | **N0** | **r** | **k** |  |
| 14 | 50 | 1,13 | 71 |  |
| Вариант 10 | | | | | | |  |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **МОДЕЛИ СВОБОДНОГО И ОГРАНИЧЕННОГО РОСТА ПОПУЛЯЦИЙ** | | | | |
|  |  |  |  |  |
| **t0** | **N0** | **r** | **k** |  |
| 28 | 50 | 1,34 | 74 |  |
| Вариант 11 | | | | | | |  |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **МОДЕЛИ СВОБОДНОГО И ОГРАНИЧЕННОГО РОСТА ПОПУЛЯЦИЙ** | | | | |
|  |  |  |  |  |
| **t0** | **N0** | **r** | **k** |  |
| 22 | 59 | 0,66 | 93 |  |
| Вариант 12 | | | | | | |  |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **МОДЕЛИ СВОБОДНОГО И ОГРАНИЧЕННОГО РОСТА ПОПУЛЯЦИЙ** | | | | |
|  |  |  |  |  |
| **t0** | **N0** | **r** | **k** |  |
| 16 | 37 | 0,60 | 98 |  |
| Вариант 13 | | | | | | |  |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **МОДЕЛИ СВОБОДНОГО И ОГРАНИЧЕННОГО РОСТА ПОПУЛЯЦИЙ** | | | | |
|  |  |  |  |  |
| **t0** | **N0** | **r** | **k** |  |
| 10 | 46 | 1,92 | 78 |  |
| Вариант 14 | | | | | | |  |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **МОДЕЛИ СВОБОДНОГО И ОГРАНИЧЕННОГО РОСТА ПОПУЛЯЦИЙ** | | | | |
|  |  |  |  |  |
| **t0** | **N0** | **r** | **k** |  |
| 23 | 46 | 0,12 | 91 |  |
| Вариант 15 | | | | | | |  |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **МОДЕЛИ СВОБОДНОГО И ОГРАНИЧЕННОГО РОСТА ПОПУЛЯЦИЙ** | | | | |
|  |  |  |  |  |
| **t0** | **N0** | **r** | **k** |  |
| 17 | 54 | 1,43 | 70 |  |
| Вариант 16 | | | | | | |  |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **МОДЕЛИ СВОБОДНОГО И ОГРАНИЧЕННОГО РОСТА ПОПУЛЯЦИЙ** | | | | |
|  |  |  |  |  |
| **t0** | **N0** | **r** | **k** |  |
| 11 | 33 | 1,37 | 76 |  |
| Вариант 17 | | | | | | |  |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **МОДЕЛИ СВОБОДНОГО И ОГРАНИЧЕННОГО РОСТА ПОПУЛЯЦИЙ** | | | | |
|  |  |  |  |  |
| **t0** | **N0** | **r** | **k** |  |
| 25 | 33 | 1,58 | 78 |  |
| Вариант 18 | | | | | | |  |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **МОДЕЛИ СВОБОДНОГО И ОГРАНИЧЕННОГО РОСТА ПОПУЛЯЦИЙ** | | | | |
|  |  |  |  |  |
| **t0** | **N0** | **r** | **k** |  |
| 19 | 41 | 0,90 | 99 |  |
| Вариант 19 | | | | | | |  |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **МОДЕЛИ СВОБОДНОГО И ОГРАНИЧЕННОГО РОСТА ПОПУЛЯЦИЙ** | | | | |
|  |  |  |  |  |
| **t0** | **N0** | **r** | **k** |  |
| 13 | 50 | 0,22 | 87 |  |
| Вариант 20 | | | | | | |  |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **МОДЕЛИ СВОБОДНОГО И ОГРАНИЧЕННОГО РОСТА ПОПУЛЯЦИЙ** | | | | |
|  |  |  |  |  |
| **t0** | **N0** | **r** | **k** |  |
| 27 | 50 | 0,42 | 91 |  |
| Вариант 21 | | | | | | |  |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **МОДЕЛИ СВОБОДНОГО И ОГРАНИЧЕННОГО РОСТА ПОПУЛЯЦИЙ** | | | | |
|  |  |  |  |  |
| **t0** | **N0** | **r** | **k** |  |
| 20 | 58 | 1,75 | 70 |  |
| Вариант 22 | | | | | | |  |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **МОДЕЛИ СВОБОДНОГО И ОГРАНИЧЕННОГО РОСТА ПОПУЛЯЦИЙ** | | | | |
|  |  |  |  |  |
| **t0** | **N0** | **r** | **k** |  |
| 14 | 37 | 1,67 | 75 |  |
| Вариант 23 | | | | | | |  |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **МОДЕЛИ СВОБОДНОГО И ОГРАНИЧЕННОГО РОСТА ПОПУЛЯЦИЙ** | | | | |
|  |  |  |  |  |
| **t0** | **N0** | **r** | **k** |  |
| 28 | 37 | 1,87 | 78 |  |
| Вариант 24 | | | | | | |  |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **МОДЕЛИ СВОБОДНОГО И ОГРАНИЧЕННОГО РОСТА ПОПУЛЯЦИЙ** | | | | |
|  |  |  |  |  |
| **t0** | **N0** | **r** | **k** |  |
| 22 | 45 | 1,20 | 97 |  |
| Вариант 25 | | | | | | |  |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **МОДЕЛИ СВОБОДНОГО И ОГРАНИЧЕННОГО РОСТА ПОПУЛЯЦИЙ** | | | | |
|  |  |  |  |  |
| **t0** | **N0** | **r** | **k** |  |
| 16 | 54 | 0,53 | 86 |  |
| Вариант 26 | | | | | | |  |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **МОДЕЛИ СВОБОДНОГО И ОГРАНИЧЕННОГО РОСТА ПОПУЛЯЦИЙ** | | | | |
|  |  |  |  |  |
| **t0** | **N0** | **r** | **k** |  |
| 10 | 33 | 0,46 | 92 |  |
| Вариант 27 | | | | | | |  |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **МОДЕЛИ СВОБОДНОГО И ОГРАНИЧЕННОГО РОСТА ПОПУЛЯЦИЙ** | | | | |
|  |  |  |  |  |
| **t0** | **N0** | **r** | **k** |  |
| 24 | 32 | 0,66 | 95 |  |
| Вариант 28 | | | | | | |  |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **МОДЕЛИ СВОБОДНОГО И ОГРАНИЧЕННОГО РОСТА ПОПУЛЯЦИЙ** | | | | |
|  |  |  |  |  |
| **t0** | **N0** | **r** | **k** |  |
| 17 | 41 | 1,99 | 75 |  |
| Вариант 29 | | | | | | |  |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **МОДЕЛИ СВОБОДНОГО И ОГРАНИЧЕННОГО РОСТА ПОПУЛЯЦИЙ** | | | | |
|  |  |  |  |  |
| **t0** | **N0** | **r** | **k** |  |
| 11 | 50 | 1,31 | 94 |  |
| Вариант 30 | | | | | | |  |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **МОДЕЛИ СВОБОДНОГО И ОГРАНИЧЕННОГО РОСТА ПОПУЛЯЦИЙ** | | | | |
|  |  |  |  |  |
| **t0** | **N0** | **r** | **k** |  |
| 25 | 49 | 1,51 | 97 |  |

**Контрольные вопросы**

1. В чем состоит предмет исследований классической экологии?
2. В чем сущность процессов:

* внутривидовой конкуренции;
* межвидовой конкуренции;
* отношений «хищник - жертва»?

1. Каковы цели математического моделирования в экологии?
2. В чем различие приемов моделирования популяций с непрерывным и с дискретным размножением?